13　漸化式と極限(2)

基本問題 & 解法のポイント

21

下図 $\Delta \mathrm{ABM}_k$ において，余弦定理より，$\mathrm{AM}_k{}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BM}_k{}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BM}_k\cos B$

ここで，$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}\cos B=a\cos B$

M_k は BC を n 等分した点のうち，B から k 番目の点だから，$\mathrm{BM}_k=\dfrac{a}{n}\cdot k$

よって，

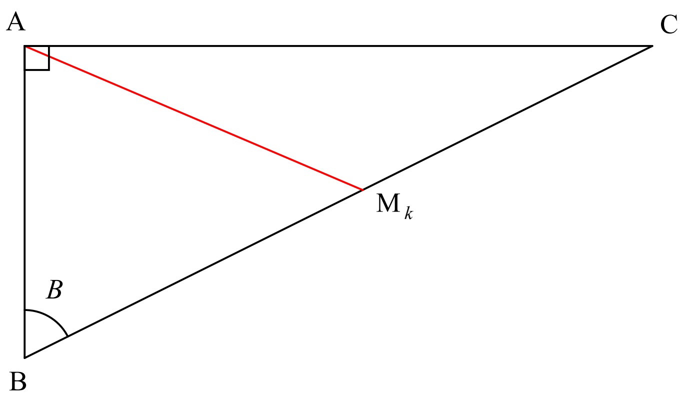
$$\begin{aligned}\mathrm{AM}_k{}^2&=a^2\cos^2 B+\frac{a^2}{n^2}\cdot k^2-2a\cos B\cdot\frac{a}{n}\cdot k\cos B\\&=a^2\cos^2 B+\frac{a^2}{n^2}\cdot k^2-\frac{2a^2\cos^2 B}{n}\cdot k\end{aligned}$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n-1}\mathrm{AM}_k{}^2\\&=a^2\cos^2 B\cdot(n-1)+\frac{a^2}{n^2}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}-\frac{2a^2\cos^2 B}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2}\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n-1}&=\lim_{n\to\infty}\left\{a^2\cos^2 B+\frac{a^2(2n-1)}{6n}-a^2\cos^2 B\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{a^2\left(2-\frac{1}{n}\right)}{6}\\&=\frac{a^2}{3}\end{aligned}$$

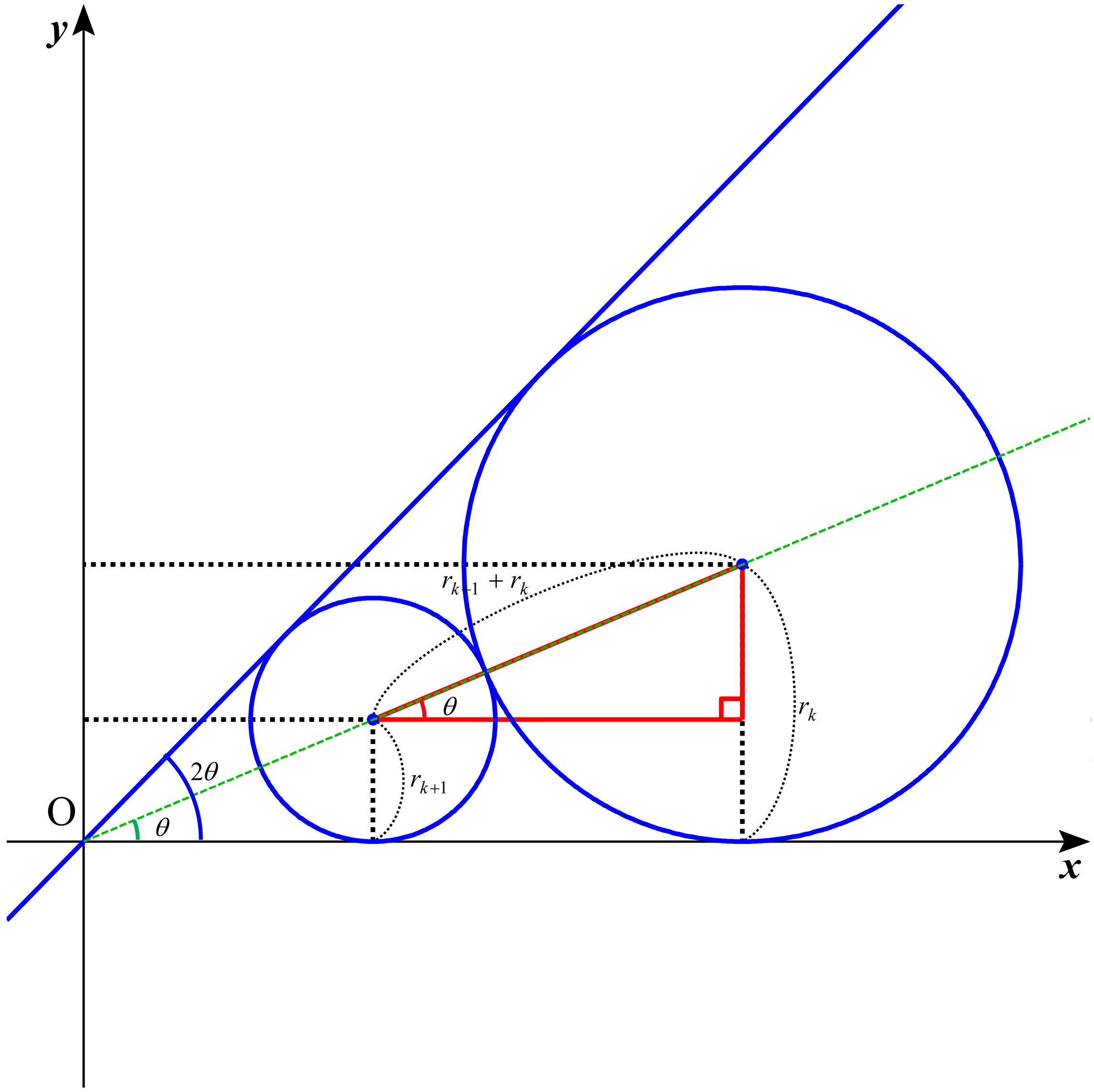


22　略解

C_k の半径を r_k とすると，下図より，$(r_{k+1}+r_k)\sin\theta = r_k - r_{k+1}$ すなわち $\dfrac{r_{k+1}}{r_k}=\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}$

これと $r_1=\tan\theta$ より，$r_k=\tan\theta\cdot\left(\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^{k-1}$　$\therefore S_k=\pi {r_k}^2=\pi\tan^2\theta\cdot\left\{\left(\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^2\right\}^{n-1}$

$0<\left(\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^2<1$ だから，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}S_k=\frac{\pi\tan^2\theta}{1-\left(\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^2}=\frac{\pi\sin\theta(1+\sin\theta)}{4(1-\sin\theta)}$



A

78

(1)

p_1は，7 個の玉から数字が 4 の玉を取り出す確率と等しいから，$p_1 = \frac{1}{7}$

p_2について

取り出し方は全部で$7^2 = 49$通り

和が 4 の倍数となる 2 数の組を$a \leq b$で表すと，

$(a,\ b) = (1,\ 3),\ (1,\ 7),\ (2,\ 2),\ (2,\ 6),\ (3,\ 5),\ (4,\ 4),\ (5,\ 7),\ (6,\ 6)$

これらの組で，$a \neq b$の 5 組は，（1 回目，2 回目）＝$(a,\ b),\ (b,\ a)$の 2 通りあるから，

4 の倍数となる取り出し方は$5 \cdot 2 + 3 = 13$通り

よって，$p_2 = \frac{13}{49}$

(2)

n個の数の和が 4 の倍数のとき$n+1$個の数の和が 4 の倍数になる確率

$n+1$回目は 4 を取り出せばよいから，$\frac{1}{7}p_n$　・・・①

n個の数の和が 4 の倍数でないとき$n+1$個の数の和が 4 の倍数になる確率

n個の数の和を 4 で割った余りが 1 のときは 3 または 7 を，2 のときは 2 または 6 を，

3 のときは 1 または 5 を取り出せばよく，いずれも$\frac{2}{7}$の確率で取り出される。

よって，帰納的に，n個の数の和を 4 で割った余りが$1,\ 2,\ 3$である確率は等確率

すなわち，それぞれ$\frac{1}{3}(1-p_n)$である。

ゆえに，$n+1$個の数の和が 4 の倍数になる確率は

$\frac{1}{3}(1-p_n)\cdot\frac{2}{7} + \frac{1}{3}(1-p_n)\cdot\frac{2}{7} + \frac{1}{3}(1-p_n)\cdot\frac{2}{7} = \frac{2}{7}(1-p_n)$　・・・②

よって，①＋②より，$p_{n+1} = -\frac{1}{7}p_n + \frac{2}{7}$

(3)

$p_{n+1} = -\frac{1}{7}p_n + \frac{2}{7}$より，$p_{n+1} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{7}\left(p_n - \frac{1}{4}\right)$　$\therefore p_n - \frac{1}{4} = \left(-\frac{1}{7}\right)^{n-1}\left(p_1 - \frac{1}{4}\right)$

これに$p_1 = \frac{1}{7}$を代入し，整理することにより，$p_n = \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{7}\right)^n + \frac{1}{4}$

また，これより，$\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{4}$

79

(1)

D_{n-1} の 1 辺の長さを l_{n-1}，辺の数を N_{n-1} とすると，$L_{n-1}=l_{n-1}N_{n-1}$

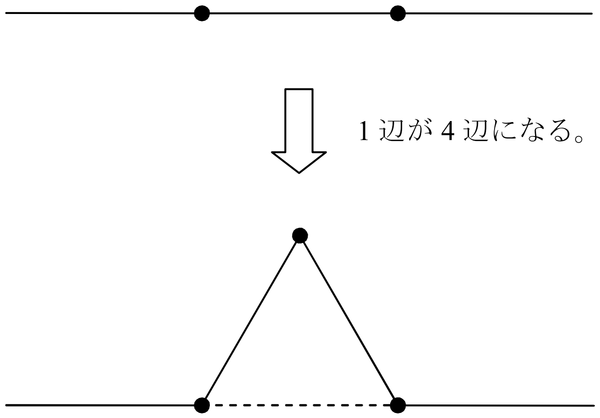
また，D_n の 1 辺の長さ $l_n=\frac{1}{3}l_{n-1}$，辺の数 $N_n=4N_{n-1}$ となる。

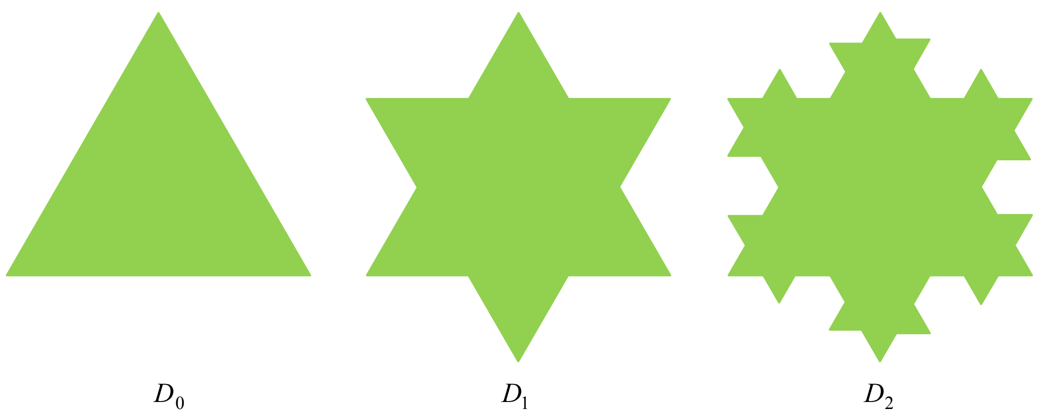
これより，

$$\begin{aligned}L_n&=l_nN_n\\&=\frac{4}{3}l_{n-1}N_{n-1}\\&=\frac{4}{3}L_{n-1}\end{aligned}$$

よって，$L_n=\left(\frac{4}{3}\right)^nL_0$

これと $L_0=3a$ より，$L_n=3a\left(\frac{4}{3}\right)^n$





(2)

D_n の面積は D_{n-1} に 1 辺の長さ l_n の正三角形を N_{n-1} 個加えた面積と等しいから，

$$S_n=S_{n-1}+\frac{1}{2}{l_n}^2\sin 60°\cdot N_{n-1}$$

ここで，(1)より，

$$l_n=\frac{1}{3}l_{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^n l_0=a\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$N_n=4N_{n-1}=4^n N_0=3\cdot 4^n$$

よって，

$$S_n=S_{n-1}+\frac{1}{2}\left\{a\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 3\cdot 4^{n-1}=S_{n-1}+\frac{\sqrt{3}}{12}a^2\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$$

すなわち，$S_n-S_{n-1}=\dfrac{\sqrt{3}}{12}a^2\left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1}$

ゆえに，

$$\begin{aligned}S_n&=S_0+\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{3}}{12}a^2\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1}\\&=S_0+\frac{\sqrt{3}}{12}a^2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1}\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2+\frac{\sqrt{3}}{12}a^2\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1-\frac{4}{9}}\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2+\frac{3\sqrt{3}}{20}a^2\left\{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right\}\\&=\frac{2\sqrt{3}}{5}a^2-\frac{3\sqrt{3}}{20}a^2\left(\frac{4}{9}\right)^n\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}S_n&=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2\sqrt{3}}{5}a^2-\frac{3\sqrt{3}}{20}a^2\left(\frac{4}{9}\right)^n\right\}\\&=\frac{2\sqrt{3}}{5}a^2-\frac{3\sqrt{3}}{20}a^2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n\\&=\frac{2\sqrt{3}}{5}a^2\end{aligned}$$

B

80

(1)

p_{n+1}

$$(R,W)=(1,\ 2)\xrightarrow{\text{確率}={}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2}(R,\ W)=(1,\ 2)$$

または

$$(R,W)=(2,\ 1)\xrightarrow{\text{確率}={}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^2}(R,\ W)=(1,\ 2)$$

より，

$$\begin{aligned}p_{n+1}&={}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2p_n+{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^2q_n\\&=\frac{4}{9}p_n+\frac{2}{9}q_n\end{aligned}$$

q_{n+1}

$$(R,W)=(1,\ 2)\xrightarrow{{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)}(R,\ W)=(2,\ 1)\text{ または }(R,W)=(2,\ 1)\xrightarrow{{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)}(R,\ W)=(2\ 1)$$

より，

$$\begin{aligned}q_{n+1}&={}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)p_n+{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)q_n\\&=\frac{2}{9}p_n+\frac{4}{9}q_n\end{aligned}$$

(2)

$p_{n+1}=\frac{4}{9}p_n+\frac{2}{9}q_n$， $q_{n+1}=\frac{2}{9}p_n+\frac{4}{9}q_n$ より， $p_{n+1}+q_{n+1}=\frac{2}{3}\left(p_n+q_n\right)$

よって， $p_n+q_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(p_0+q_0\right)$

これと $p_0=1,\ q_0=0$ より， $p_n+q_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n$

(3)

r_{n+1} について，

$$(R,W)=(1,\ 2)\xrightarrow{\text{確率}={}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3}(R,\ W)=(1,\ 2)$$

または

$$(R,W)=(2,\ 1)\xrightarrow{\text{確率}={}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{3}\right)^2}(R,\ W)=(1,\ 2)$$

または

$(R,W)=(3,\ 0)\xrightarrow{\text{確率}=1}(R,\ W)=(3,\ 0)$

より，

$r_{n+1}=\dfrac{1}{27}p_n+\dfrac{8}{27}q_n+r_n \quad \therefore r_{n+1}-r_n=\dfrac{1}{27}p_n+\dfrac{8}{27}q_n$

ここで，

$p_{n+1}=\dfrac{4}{9}p_n+\dfrac{2}{9}q_n$，　$q_{n+1}=\dfrac{2}{9}p_n+\dfrac{4}{9}q_n$ より，　$p_{n+1}-q_{n+1}=\dfrac{2}{9}(p_n-q_n)$

よって，

$$\begin{aligned}p_n-q_n&=\left(\frac{2}{9}\right)^n(p_0-q_0)\\&=\left(\frac{2}{9}\right)^n \quad (\because p_0=1,\ q_0=0)\end{aligned}$$

これと $p_n+q_n=\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ より，　$p_n=\dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+\left(\dfrac{2}{9}\right)^n\right\}$，　$q_n=\dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-\left(\dfrac{2}{9}\right)^n\right\}$

したがって，

$$\begin{aligned}r_{n+1}-r_n&=\frac{1}{27}p_n+\frac{8}{27}q_n\\&=\frac{1}{54}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{9}\right)^n\right\}+\frac{8}{54}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{2}{9}\right)^n\right\}\\&=\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^n-\frac{7}{54}\left(\frac{2}{9}\right)^n\end{aligned}$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}r_n&=r_0+\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^k-\frac{7}{54}\left(\frac{2}{9}\right)^k\right\}\\&=0+\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}-\frac{7}{54}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{9}\right)^{k\hat{}1}\\&=\frac{1}{6}\cdot\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}-\frac{7}{54}\cdot\frac{1-\left(\frac{2}{9}\right)^n}{1-\frac{2}{9}}\\&=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{6}\left(\frac{2}{9}\right)^n\end{aligned}$$

これより，　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r_n=\frac{1}{3}$

81

(1)

$y'=2x$ より，$(x_n,\ f(x_n))$における接線の方程式は $y=2x_n(x-x_n)+x_n{}^2-a$

すなわち $y=2x_nx-x_n{}^2-a$

条件より，この直線は点$(x_{n+1},\ 0)$を通るから，$0=2x_nx_{n+1}-x_n{}^2-a$　$\therefore 2x_nx_{n+1}=x_n{}^2+a$

ここで，$2x_nx_{n+1}=x_n{}^2+a$ に $x_n=0$ を代入とすると，$0=a$ となるが，

$a>0$ より，この等式は成り立たない。よって，$x_n\neq 0$　ゆえに，$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}x_n+\dfrac{a}{2x_n}$

(2)

$$x_{n+1}-\sqrt{a}=\frac{1}{2}x_n+\frac{a}{2x_n}-\sqrt{a}$$
$$=\frac{x_n{}^2+a-2\sqrt{a}x_n}{2x_n}$$
$$=\frac{\left(x_n-\sqrt{a}\right)^2}{2x_n}\quad\cdots①$$

ここで，$x_1=\sqrt{3}>0$　・・・②

$x_k>0$ とすると，$x_{k+1}=\dfrac{1}{2}x_k+\dfrac{a}{2x_k}>0$　・・・③

②，③より，すべての自然数 n について $x_n>0$　・・・④　が成り立つ。

よって，$x_{n+1}-\sqrt{a}=\dfrac{\left(x_n-\sqrt{a}\right)^2}{2x_n}\geq 0$

また，$x_{n+1}-\sqrt{a}=0$ とすると，$x_{n+1}-\sqrt{a}=\dfrac{\left(x_n-\sqrt{a}\right)^2}{2x_n}$ より，　$x_1-\sqrt{a}=0$ が成り立つ。

これは $x_1>\sqrt{a}$ であることに反する。

ゆえに，$x_{n+1}-\sqrt{a}=\dfrac{\left(x_n-\sqrt{a}\right)^2}{2x_n}>0$

すなわち $\sqrt{a}<x_{n+1}$　・・・⑤

また，④，⑤より，

$$x_n-x_{n+1}=x_n-\left(\frac{1}{2}x_n+\frac{a}{2x_n}\right)$$
$$=\frac{1}{2}x_n-\frac{a}{2x_n}=\frac{x_n{}^2-a}{2x_n}$$
$$=\frac{\left(x_n+\sqrt{a}\right)\left(x_n-\sqrt{a}\right)}{2x_n}>0$$

$\therefore x_{n+1}<x_n$　・・・⑥

ゆえに，⑤，⑥より，$\sqrt{a}<x_{n+1}<x_n$

(3)

①より，

$$x_{n+1}-\sqrt{a}=\frac{\left(x_n-\sqrt{a}\right)^2}{2x_n}$$
$$=\frac{x_n-\sqrt{a}}{2x_n}\left(x_n-\sqrt{a}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{a}}{x_n}\right)\left(x_n-\sqrt{a}\right)$$

ここで，$\sqrt{a}<x_n$ より，$0<\dfrac{\sqrt{a}}{x_n}<1$　$\therefore 0<1-\dfrac{\sqrt{a}}{x_n}<1$

ゆえに，$x_{n+1}-\sqrt{a}<\dfrac{1}{2}\left(x_n-\sqrt{a}\right)$　したがって，$\left|x_{n+1}-\sqrt{a}\right|<\dfrac{1}{2}\left|x_n-\sqrt{a}\right|$

(4)

$0<\left|x_{n+1}-\sqrt{a}\right|<\dfrac{1}{2}\left|x_n-\sqrt{a}\right|$ より，$0<\left|x_n-a\right|<\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\left|x_1-\sqrt{a}\right|$

また，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left|x_1-\sqrt{a}\right|=\left|x_1-a\right|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$=0$$

よって，はさみうちの原理により，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|x_n-\sqrt{a}\right|=0$

ゆえに，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$

補足： $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$ を楽に求める方法

(1)より，$x_n\neq 0$ だから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\alpha$ （α は 0 でない有限確定値）とすると，

$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}x_n+\dfrac{a}{2x_n}$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}x_n+\frac{a}{2x_n}\right)$

すなわち $\alpha=\dfrac{1}{2}\alpha+\dfrac{a}{2\alpha}$　よって，$\alpha^2=a$　・・・①

ここで，$x_1=\sqrt{3}>0$　・・・②

$x_k>0$ とすると，$x_{k+1}=\dfrac{1}{2}x_k+\dfrac{a}{2x_k}>0$　・・・③

②，③より，すべての自然数 n について $x_n>0$ が成り立つから，$\alpha>0$　・・・④

①，④より，$\alpha=\sqrt{a}$